

XI. előadás

4.6. Síkfeszültségű peremérték feladat

Rugalmas ÁSF peremérték feladat kitűzése a 4. ábrán látható.

Az elmozdulás mező a helynek ismeretlen függvénye:

$$\vec{u}^*(\vec{r}) = u(x, y)\vec{e}_x + v(x, y)\vec{e}_y, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix},$$

ahol a felső indexben a * most a feladat síkbeli jellegére utal.

A vastagság menti átlagos alakváltozások síkbeli része

$$\underline{\underline{A}}^* = \frac{1}{2}(\vec{u}^* \circ \nabla^* + \nabla^* \circ \vec{u}^*), \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

ahol $\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y$ a síkbeli nabla operátor, és a fel nem tüntetett síkra merőleges átlagos

fajlagos nyúlás $\varepsilon_z = -\frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{1-\nu}$ képlettel számítható.

Az átlagos feszültségek tenzora (Hooke-törvény) és független elemeinek oszlopvektora:

$$\underline{\underline{F}}^* = 2G \left(\underline{\underline{A}}^* + \frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{1-\nu} \underline{\underline{I}}^* \right), \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}.$$

Az anyagtörvény mátrixos formában is felírható:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Az egyensúlyi egyenlet:

$$\underline{\underline{F}}^* \circ \nabla^* + \rho \vec{g}^* = \vec{0}, \quad \underline{\underline{g}} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } \vec{g}^* \text{ a gyorsulás vektor (pl. gravitáció, forgás, stb.)}$$

Kinematikai peremfeltétel:

$$\vec{u}^*(\vec{r}^*) = \vec{u}_0^*(\vec{r}^*), \quad \vec{r}^* \in A_u.$$

Dinamikai peremfeltétel:

$$\underline{\underline{F}}^* \cdot \vec{n} = \vec{p}^*, \quad \vec{r}^* \in A_p, \quad \underline{\underline{p}} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

A síkbeli feladat összesen 8 ismeretlen mezőt tartalmaz, ezek egyértelmű meghatározásához 8 skalár egyenlet (részben parciális differenciálegyenlet) és a megfelelő peremfeltételek állnak rendelkezésre. Azt a megoldást, amely eleget tesz az előbb felsorolt egyenleteknek egzakt megoldásának nevezzük.

Természetesen most is közelítő megoldást keresünk a potenciális energia minimuma elv felhasználásával.

A bevezetett mennyiségekkel a rugalmas síkbeli feladatra a teljes potenciális energia az alábbi alakban írható

$$\Pi_p(\underline{\underline{u}}) = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} dV - \int_V \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{\rho}} g dV - \int_{A_p} \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}} dA$$

Végelem módszer alkalmazásakor az elemekre bontott tartományokon lokálisan approximált elmozdulással fejezzük ki a potenciális energiát:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{N_{elem}} \left\{ \Pi_p^e(\underline{\underline{u}}^e) \right\},$$

ahol N_{elem} az elemek száma, $\Pi_p^e(\underline{\underline{u}}^e)$ az elemenkénti approximációval kifejezett potenciális energia

$$\Pi_p^e(\underline{\underline{u}}^e) = \frac{1}{2} \int_{V^e} \underline{\underline{\varepsilon}}^{eT} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}^e dV - \int_{V^e} \underline{\underline{u}}^{eT} \underline{\underline{\rho}} g^e dV - \int_{A_p} \underline{\underline{u}}^{eT} \underline{\underline{p}}^e dA$$

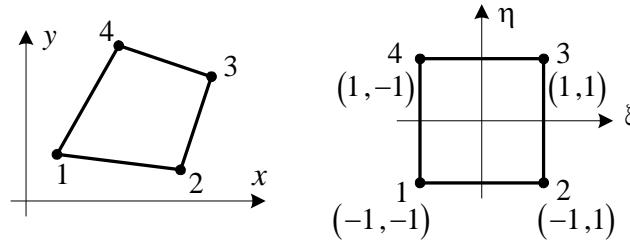
Végül a potenciális energia minimum elvből határozhatók meg az elmozdulás mező ismeretlen paraméterei (csomóponti elmozdulások).

Általánosított síkfeszültségű lineáris izoparametrikus végelem:

A következőkben egy elem potenciális energiájának előállítására, valamint a merevségi mátrix és tehervektor származtatására kerül sor.

Síkbeli esetben a tekintett végelemhez egy lokális ξ, η KR-t rendelünk.

A ξ, η lokális és az x, y globális KR pontjai között a leképezés teremti meg.



1. ábra: A globális x, y és a természetes ξ, η lokális koordináta rendszer közötti leképezés

A négyszögelemet az egyszerűbb számítás miatt négyzetté képezzük le egy természetes ξ, η koordináta rendszerben. A leképezés alkalmazásának előnye elsősorban abban jelentkezik, hogy a ξ, η koordináta-rendszerbeli integrálásra létezik könnyen programozható numerikus algoritmus.

A geometria leképezése, ahol az alakfüggvények:

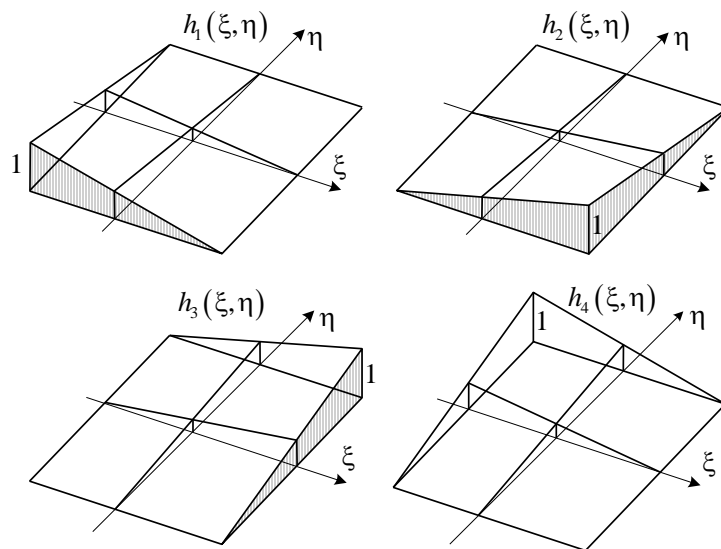
$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \right\}, \text{ ahol az alakfüggvények:}$$

Alakfüggvények / Approximációs függvények:

(Minden alakfüggvény tartalmaz egy másodfokú tagot is.)

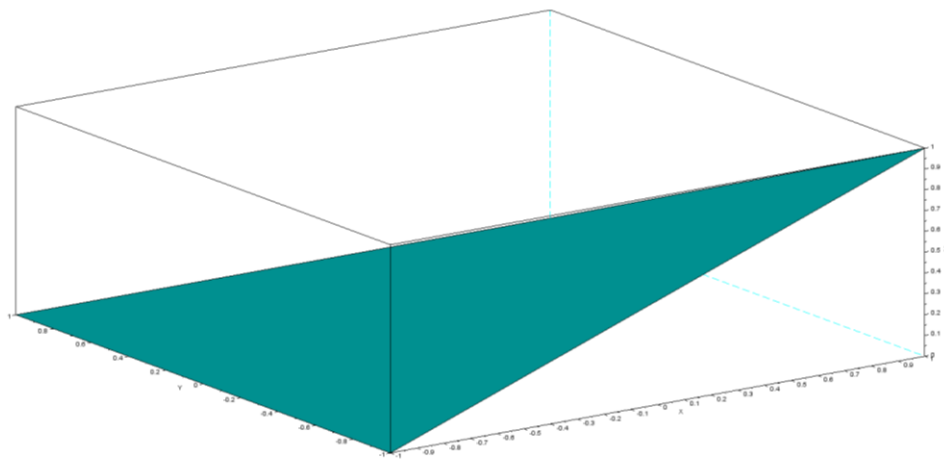
$$h_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad h_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$h_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad h_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$



2. ábra: Alakfüggvények

Az alakfüggvényeket szokás interpolációs függvényeknek is nevezni, szemléltetésük Scilab program segítségével történik:



3. ábra: Alakfüggvény

Az elmozdulás közelítése:

Az izoparametrikus elnevezésből következően ugyanazokat az alakfüggvényeket használjuk az elmozdulás mező közelítésére is mint a geometria leképezésére.

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) u_i \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) v_i \end{aligned} \right\}$$

Az approximáció mátrixos alakban:

$$\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta) = \underline{\underline{H}}^e \underline{\underline{q}}^e = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Az alakváltozási jellemzők számítása:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta) \underline{\underline{q}}^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} u^e(\xi, \eta) \\ v^e(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial h_m}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y} & \frac{\partial h_m}{\partial x} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}^e,$$

ahol $\underline{\underline{B}}^e$ az úgynevezett elmozdulás-alakváltozás mátrix és h_{ix}, h_{iy} a h_i alakfüggvények x, y szerinti deriváltjai.

Továbbá: a $\underline{\underline{B}}^e$ elmozdulás-alakváltozás mátrix az interpolációs függvények x és y szerinti deriváltjait tartalmazza.

$$\underline{\underline{B}}^e = \underline{\underline{\partial H}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Az előbbi két összefüggésben az alakfüggvények x, y szerinti deriváltjai szerepelnek. Viszont az interpolációs függvények csak mint ξ és η függvényei ismertek. Így az x, y szerinti deriválás a lánc szabály alkalmazásával valósítható meg:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right\} \Rightarrow; \quad \left. \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\} \Rightarrow;$$

A lokális geometria, valamint ξ és η szerinti deriváltak:

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \right\} \text{lokális geometria,}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} x_i; & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \eta} x_i; \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} y_i; & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \eta} y_i; \end{aligned} \right\} \xi \text{ és } \eta \text{ szerinti deriváltak}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right\} \Rightarrow; \quad \left. \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\} \Rightarrow \text{deriváltak mátrix formában:}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underline{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

ahol \underline{J} az úgynevezett Jacobi mátrix.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

A Jacobi determináns pedig:

$$\det \underline{J} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

Az inverz Jacobi mátrix segítségével az x és y szerinti deriváltak:

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az alakfüggvények x,y szerinti deriváltjai szerepelnek. ez a deriválás a lánc szabály alkalmazásával valósítható meg.

Ebben az esetben viszont a Jacobi mátrix inverze közvetlenül nem állítható elő, de a Jacobi mátrix igen.

A Jacobi mátrix meghatározása után pedig az inverz-képzést alkalmazzuk a numerikus számításoknál.

$$\underline{\underline{J}}^{-1}(\xi, \eta) = \frac{\text{adj}(\underline{\underline{J}})}{\det|\underline{\underline{J}}|}$$

A Jacobi mátrix jelentősége:

A Jacobi mátrix determinánása igen fontos szerepet játszik az elem leképezésének ellenőrzése során is. Ha értéke zérus, akkor a leképezés szinguláris. A gyakorlatban ilyenkor azt érzékeljük, hogy az elem eltorzult alakú és az eredmény nem megbízható, ugyanis a Jacobi-féle determináns előjelet vált a különböző pontokban. Ilyen esetben a végelem felosztáson kell módosítani.

Így

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left(J_{22} \frac{\partial}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left(-J_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

Így az alakváltozási mátrix tehát:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}^e = \underline{\underline{\partial H}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} = \left(J_{22} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} = \left(-J_{21} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} \end{bmatrix}, \text{ ahol} \end{aligned}$$

az alakfüggvények deriváltjai:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{\partial h_1}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ \frac{\partial h_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi) \\ \frac{\partial h_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{\partial h_3}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi) \\ \frac{\partial h_4}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{\partial h_4}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi)\end{aligned}$$

A feszültség származtatása: $\underline{\underline{\sigma}}^e(\xi, \eta) = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta) = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta) \underline{\underline{q}}^e$.

Az elem teljes potenciális energiája az alakváltozási energiából és a külső erők virtuális munkájából áll.

Alakváltozási energia:

$$\frac{1}{2} \int_{V^e} \underline{\underline{\varepsilon}}^{eT} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}^e dV = \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^{eT} \int_{A^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^e b dx dy \underline{\underline{q}}^e = \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^{eT} \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^e b \mathbf{det} \underline{\underline{J}} d\xi d\eta}_{\substack{\underline{\underline{K}}^e - \text{merevségi} \\ \text{mátrix}}} \underline{\underline{q}}^e$$

Az integrálban a dV elemi térfogat a b az elem/tárcsa vastagsága. A $dx dy$ felületi elem új változóra történő áttérése miatt az elemi térfogatban megjelenik a Jacobi determináns is:

$$dV = b dx dy = b \mathbf{det} \underline{\underline{J}} d\xi d\eta.$$

Az elem xy / Rz KR-ben vett merevségi mátrixának kiszámítása:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta) c(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

A térfogati erő munkája:

$$\int_{V^e} \underline{\underline{u}}^{eT} \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{g}}^e dV = \underline{\underline{q}}^{eT} \int_{A^e} \underline{\underline{H}}^{eT} \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{g}}^e b dx dy = \underline{\underline{q}}^{eT} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{H}}^{eT} \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{g}}^e b \mathbf{det} \underline{\underline{J}} d\xi d\eta$$

Az integrációs tartomány alakja négyzet!

Az integrandusz bonyolultsága miatt numerikus integrálást alkalmazunk, ahol

n - integrációs pontok (talppontok) száma,

ξ_i, η_j - az integrációs pontok,

w_i, w_j - integrációs súlytényezők.

A külső erők munkái és az alakváltozási energia is felületi integrálokat tartalmaznak a két egység élű négyzet felett, valamint egy vonalintegrált a +1, -1 tartományon.

Mindkét integrál típusra alkalmazható az ún. Gauss-féle kvadratura.

Gauss-kvadratura:

Az integrálási pontokat egymástól nem egyenlő távolságra, hanem optimális távolságra vesszük fel. Ettől az integrálás pontosságának javulását várjuk.

A közelítő függvény az előző esetben: $f(x) \approx \eta(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i)$.

Itt az x_i helyeket is ismeretlennek tekintjük. (Az előző esetben az x_i helyek ismertek voltak.)

Vegyük fel polinomot gyöktényezős alakban: $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

Ez a polinom az x_i helyen $P(x_i) = 0$ értéket vesz fel.

Vegyük fel a közelítő függvényt itt az alábbi alakban:

$$f(x) \approx \eta(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i) + P(x)(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n).$$

Itt egy olyan közelítő polinomot vettünk fel az n pontra, amelynek rendje $2n-1$.

Az előző gondolatmenet alapján: $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\int_a^b L_i(x) dx \right]}_{w_i} f(x_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left[\int_a^b x^j P(x) dx \right]$.

Optimalizációs feltétel: a második szumma tűnjön el.

$$\int_{x=a}^b x^k P(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

\Downarrow

$x_k = \dots$ optimális integrálási pontok.

A w_i integrálási súlyok függenek az $[a, b]$ intervallum nagyságától.

Ha $a = -1$ és $b = 1$ akkor a Gauss-féle integrálási pontok és integrálási együtthatók:

n	x_i	w_i
1	0,0000000000	0,0000000000
2	$\pm 0,5773502691$	1,0000000000
3	$\pm 0,774596692$	0,5555555556
	0,0000000000	0,8888888889
\vdots	\vdots	\vdots

Megjegyzések:

- Az n integrálási pontú Gauss formula legfeljebb $(2n-1)$ -ed fokú polinomig bezárólag adja meg az integrál pontos értékét.
- Javasolt integrálási foksók 2D feladatoknál:

Csomópontok száma Integrálás foksók

$m = 4, 3$ 2×2

$m = 8, 6$ 3×3

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\underline{\underline{B}}^e \right]^T b \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e \det |J| d\xi d\eta = \underline{\underline{K}}^e = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi_i, \eta_j) \right]^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi_i, \eta_j) b \det |J|(\xi_i, \eta_j)$$

Tehervektor a térfogati terhelésből:

$$\underline{\underline{f}}_{=\rho}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{H}}^{eT} \rho g^e b \det |J| d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j \underline{\underline{H}}^{eT} \rho g^e b \det |J| d\xi d\eta$$

Ezután következik a potenciális energia meghatározása egy elemre, majd a szerkezetre.